



تابش هاو کینگ و تونل زنی کوانتومی

نویسنده:

شعرا جعفری تبار

سال تحصیلی:

1399-1400

1. مقدمه

در تئوری نیوتون برای گرانش، برای سرعت فرار v ، برای یک جسم به جرم M و در فاصله r برابر است با:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \quad (1.1)$$

میتوانیم از خودمان بپرسیم که اگر جرم آنقدر بزرگ باشد که در فاصله معینی سرعت فرار از سرعت نور بیشتر شود، چه اتفاقی می افتد. این اجرام آن قدر عظیم خواهند بود که چنان کشش گرانشی قوی ایجاد می کنند که هیچ چیز، حتی نور، نمی تواند از آن فرار کند. این چیزی است که سیاهچاله را تعریف می کند. سطح A_{BH} در فاصله R_S از مرکز سیاهچاله، افق رویداد نامیده می شود، در اینجا سرعت فرار برابر با سرعت نور است:

$$A_{BH} = 4\pi R_S^2 \quad R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.2)$$

این یک بحث بسیار کلاسیک است و ممکن است گمراه کننده باشد. برای درک بهتر جاذبه لازم است نسبیت عام را نیز لحاظ کنیم. این نظریه که توسط انیشتین فرمول بندی شده است، توضیح می دهد که چگونه گرانش بر هندسه فضا-زمان تأثیر می گذارد. خود انیشتین فکر می کرد که سیاهچاله ها به دلیل درک ناقص فیزیکی هستند. اما این روزها سیاهچاله ها نه تنها پذیرفته شده اند، بلکه می توان فهمید که چگونه این اجرام می توانند تشکیل شوند و ذرات و میدان ها در نزدیکی آنها چگونه رفتار می کنند.

با این حال، به نظر می رسد سیاهچاله ها هنوز دارای برخی ویژگی ها هستند که هنوز به طور کامل درک نشده اند. عموماً پذیرفته شده بود که هرگاه چیزی بیش از حد به یک سیاهچاله نزدیک شود، برای همیشه گم می شود. اما در سال 1947 استیون هاوکینگ با استفاده از نظریه میدان کوانتومی نشان داد که سیاهچاله ها تابش ساطع می کنند که گویی تابش جسم سیاه با دمای هاوکینگ است که نسبت عکس با جرم سیاهچاله دارد:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} \quad (1.3)$$

در سال های اخیر رویکردهای مختلفی برای توضیح این پدیده پیشنهاد شده است. در این پروژه تابش به عنوان نتیجه تونل زنی ذرات در منطقه افق رویداد توضیح داده می شود. تونل زنی پوسته های بدون جرم در تقریب WKB در نظر گرفته شده و یک پیش بینی برای دمای هاوکینگ ارائه شده است.

2. نسبیت عام

2.1 دستگاه مختصات و المان خطی

یکی از راه های مشخص کردن یک نقطه در فضا-زمان، معرفی یک سیستم مختصات است که برچسب منحصر به فردی به هر یک از این نقاط اختصاص می دهد. به این ترتیب از حساب دیفرانسیل می توان برای تعیین هندسه به وسیله ی المان خطی استفاده کرد. به طور کلی، یک المان خطی که یک فضای N بعدی را توصیف می کند، به عنوان مربع فاصله ds که بر حسب جابجایی های بی نهایت کوچک $q_i = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ در مختصات داده می شود.

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad (2.1)$$

که در آن، g_{ij} عنصر تانسور متریک g را که هندسه را توصیف میکند به ما میدهد و بر روی اندیس های تکراری آن جمع است. به عنوان مثال، یک فضای سه بعدی تخت در مختصات کارتزین دارای متریک زیر است:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

و در مختصات کروی

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

هر دوی این متریک ها یم هندسه را اما در دستگاه مختصات مختلف توضیح میدهد. المان خطی که متریک های زیر از آن پیروی میکنند برابر است با:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.4)$$

بنابر این ما میتوانیم یک هندسه را توسط المان های خطی متفاوت تعریف کنیم و نتیجه ی نهایی فیزیکی ما باید مستقل از این انتخاب باشد. ایم به آن معنی است که دو دستگاه را میتوانیم به یکدیگر تبدیل کنیم و در نتیجه ی نهایی تغییری ایجاد نمیشود.

2.2 فضای مینکوفسکی

تئوری نسبیت خاص انتیشتین، فضای اقلیدسی را با چهارمین مختصات زمان یعنی ct ترکیب میکند. حاصل این کار یک فضای مینکوفسکی با مختصات (ct, cx, y, z) و المان خطی:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.6)$$

بنابراین متریک را میتوانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

عبارت ds^2 یک مقدار ناورد است، به این معنی که برای ناظران دستگاه های اینرسی مختلف، یک مقدار را خواهد داشت. المان خطی، یک هندسه ی نااقلیدسی را نشان میدهد به دلیل علامت منفی بمختصه ی زمان. اما این علامت منفی، باعث میشود که ds^2 مثبت، صفر و یا منفی باشد.

$$ds^2 > 0 \rightarrow \text{فضاگونه} \quad (2.8)$$

$$ds^2 = 0 \rightarrow \text{صفر} \quad (2.9)$$

$$ds^2 < 0 \rightarrow \text{فضاگونه} \quad (2.10)$$

نور بر روی مسیر $ds^2 = 0$ حرکت میکند که به آن ها ژئودیسک صفر میگوییم. مخروط نوری، سطح سه بعدی است که توسط تور در فضا-زمان ایجاد شده است. متریک مینکوفسکی را میتوان بر حسب مختصات (ct, r, θ, φ) به صورت زیر داده میشود:

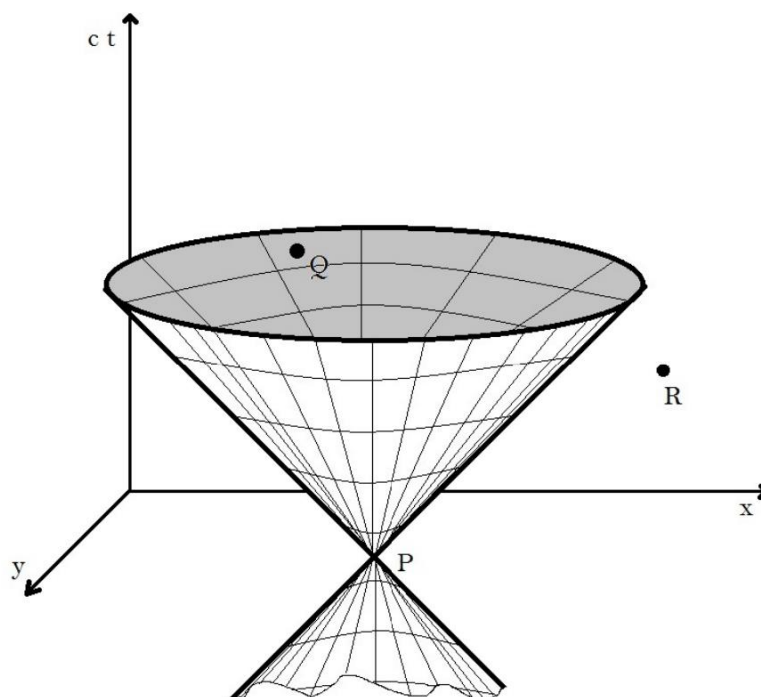
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.11)$$

2.2.1 مخروط نوری

برای درک بهتر هندسه، جهان خط نور را بررسی میکنیم. جهان خط مسیری است که یک جسم آن را در فضا-زمان دنبال میکند. برای سادگی آن را در رو بعد بررسی میکنیم که به راحتی قابل تعمیم به بعد های بالاتر است. برای نور $ds^2 = 0$ و از 2.6 داریم:

$$\frac{dx}{d(ct)} = \pm 1 \quad (2.12)$$

پس آن ها را میتوان توسط خطوطی که با محور زاویه ی 45 در جه میسازد نمایش داد.



مخروط های نوری به ما نشان میدهند که اجسام در فضا-زمان چگونه حرکت میکنند. از آنجایی که یک جسم با جرم غیر صفر، یا سرعتی بیش از سرعت نور نمیتواند حرکت کند، آنها در جهان خط زمانگونه حرکت میکنند. حال میتوانیم جهان خط یک ذره ی جرم دار را بررسی کنیم.

2.3 فضا-زمان منحنی [1]

در بخش قبل، فضای مینکوفسکی را بررسی کردیم که فضا-زمان تخت را توصیف می کند. از اصل هم ارزی اینشتین به نظر می رسد که نور هنگامی که نزدیک یک جرم است دیگر در خطوط مستقیم حرکت نمی کند. بلکه مسیر آن به سمت جرم منحنی می شود. یک روش بهتر برای توصیف این موضوع این است که بگوییم نور همچنان از خطوط مستقیم در فضا-زمان پیروی می کند، اما این خود فضا-زمان است که توسط میدان گرانشی منحنی می شود. معیارهای توصیف این فضا-زمان منحنی را می توان به عنوان راه حلی از معادلات اینشتین به دست آورد. اما حل این معادلات بسیار فراتر از هدف این گزارش است. در سال 1916 شوارتزشیلد با فرض تقارن کروی و اینکه فضا-زمان ایستا است، راه حل دقیقی برای معادلات اینشتین یافت که به این معنی است که هیچ وابستگی به t در هیچ یک از مختصات وجود ندارد که به آن راه حل شوارتزشیلد میگویند و در بخش زیر آن را بررسی میکنیم:

2.3.1 راه حل شوارتزشیلد

هندسه ی فضا-زمان بیرون از یک جرم متقارن کروی توسط المان خطی شوارتزشیلد تعریف میشود:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c^2 dt^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.13)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

از این به بعد $G = c = 1$ برگرداندن آن ها به واحد های اصلی در پیوست 1 توضیح داده شده است.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (c^2 dt^2) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.14)$$

یکی از ویژگی های این معادله این است که کاملاً مستقل از زمان (t) و زاویه ی آزیموتال (φ) است. این ویژگی از فرض هایی که شوارتزشیلد برای حل معادله ی اینشتین نشاءت میگیرد.

زمانی که هیچ جرمی وجود ندارد تا پتانسیل گرانشی را ایجاد کند، یعنی $M = 0$ ، یا زمانی که جسم در فاصله ی بینهایت دور از جرم قرار دارد، $r \rightarrow \infty$ ، المان خطی شوارتزشیلد تبدیل به المان خطی مینکوفسکی میشود.

دو تکینگی وجود دارد، یکی در $r = 0$ و یکی در $r = 2M$. اولین معادله تکینگی فیزیکی را نشان می‌دهد که تمام جرم در یک نقطه متمرکز شده است. برای پیدا کردن دومین تکینگی با وارد کردن ثابت های فیزیکی به دست می آوریم:

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.15)$$

که این مقدار دقیقا برابر شعاع شوارتزشیلد است که قبلا حساب کرده ایم. نسبیت عام به نظر میرسد که شعاع دقیق شوارتزشیلد را پیش بینی میکند. زمانی که یک جرم در شعاع شوارتزشیلدش متمرکز میشود، جرم تبدیل به یک سیاه چاله میشود. سطح کروی که شعاع آن برابر شعاع شوارتزشیلد است به افق رویداد معروف است.

2.3.2 مخروط نوری شوارتزشیلد

در این قسمت شعاع های نوری را در فضا زمان منحنی بررسی میکنیم. به این ها ژئودیسک تهی گفته میشود که برای آن ها $ds^2 = 0$ و $d\theta = d\Phi = 0$. المان خطی 2.13 به شکل زیر نوشته میشود:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(c^2 dt^2) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (2.16)$$

که از آن میتوانیم به نتیجه ی زیر برسیم:

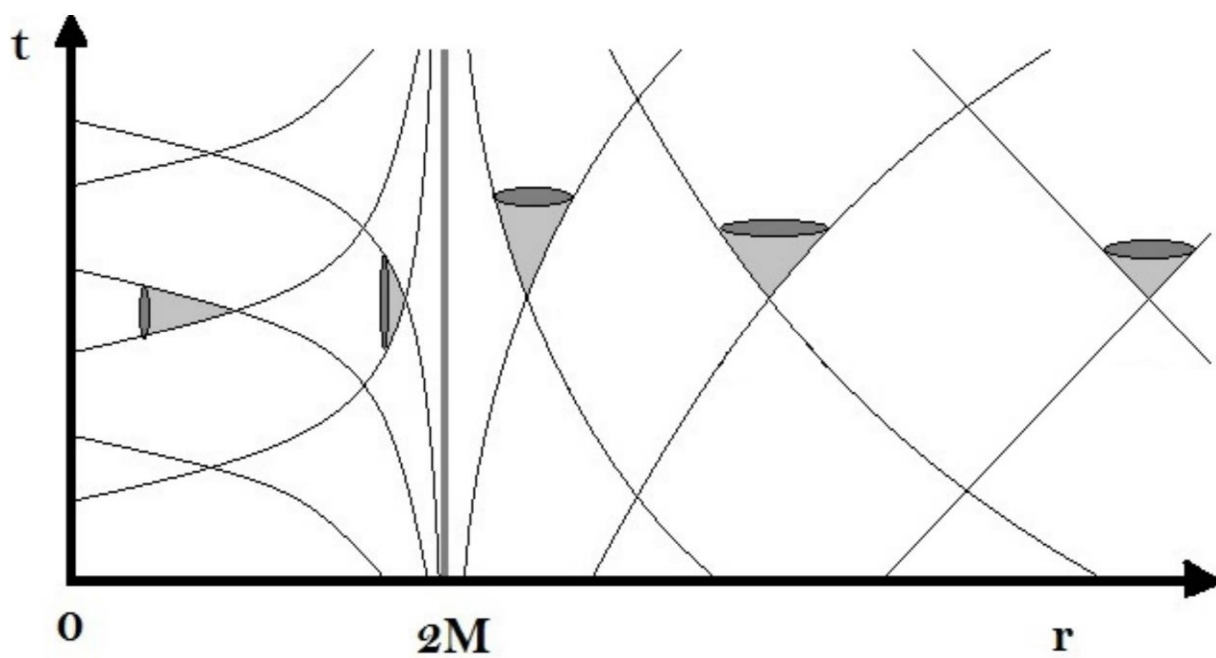
$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (2.17)$$

که در آن علامت مثبت نشان دهنده ی اشعه ی نوری که به سمت بیرون میرود است و علامت منفی نشان دهنده ی اشعه ای است که به داخل حرکت میکند.

$$t = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + constant \quad outgoing \quad (2.18)$$

$$t = -r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + constant \quad ingoing \quad (2.19)$$

این منحنی را میتوان در صفحه ی (t, r) رسم کرد. مخروط های نوری نشان دهنده ی رفتار عجیب در افق رویداد است. هر چقدر به افق رویداد نزدیک تر میشود باریک تر میشود و زمانی که از افق رویداد عبور میکند میچرخد و به نظر میرسد که t و r نقش های خود را عوض میکنند.



شکل 2.2: شعاع نوری در هندسه ی شوارتزشیلد. مخروط نوری هرچقدر به سیاه چاله نزدیک تر میشویم نازک تر میشود تا در افق رویداد 90° درجه میچرخد

2.4 مختصات ادینگتون-فینکناشتاین

هندسه ی شوارتزشیلد در مختصات عادی (t, x, y, z) یک در تکینگی در افق رویداد $r = 2M$ دارد و مخروط های نوری رفتار عجیبی رفتار این نقطه دارند. حال می‌خواهیم مختصات را تغییر دهیم به گونه ای که این تکینگی را از بین ببریم.

برای این کار یک مختصه ی جدیدی را معرفی می‌کنیم به نام ρ که در آن:

$$\rho = \int \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr = r + 2M \ln(r - 2M) \quad (2.20)$$

و یک تعریف جدید برای مختصه ی زمان ارائه می‌کنیم:

$$dt^2 = dv^2 - 2dv d\rho - d\rho^2 \quad (2.21)$$

با استفاده از معادله ی (2.160) می‌توانیم ببینیم که $d\rho = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr$ با استفاده از 2.21 و ضرب هر دو طرف معادله در $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ به دست می‌آوریم:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dr dv + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (2.22)$$

با استفاده از 2.22 و 2.14 به دست می‌آوریم:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dr dv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.23)$$

دو معادله ی 2.23 و 2.14 هندسه ی یکسانی دارند با این تفاوت که معادله ی 2.23 دیگر در $r = 2M$ تکینگی ندارد و مخروط نوری در نزدیکی افق دیگر رفتار عجیبی نخواهد داشت.

2.4.1 مخروط نوری مختصات ادینگتون فینکنشتاین

در این مختصات ژئودیسک شعاعی تهی توسط رابطه ی زیر داده میشود:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dr dv \quad (2.24)$$

و شعاع های نوری در خطوطی که در آن v ثابت است حرکت میکنند ($dv = 0$)

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.25)$$

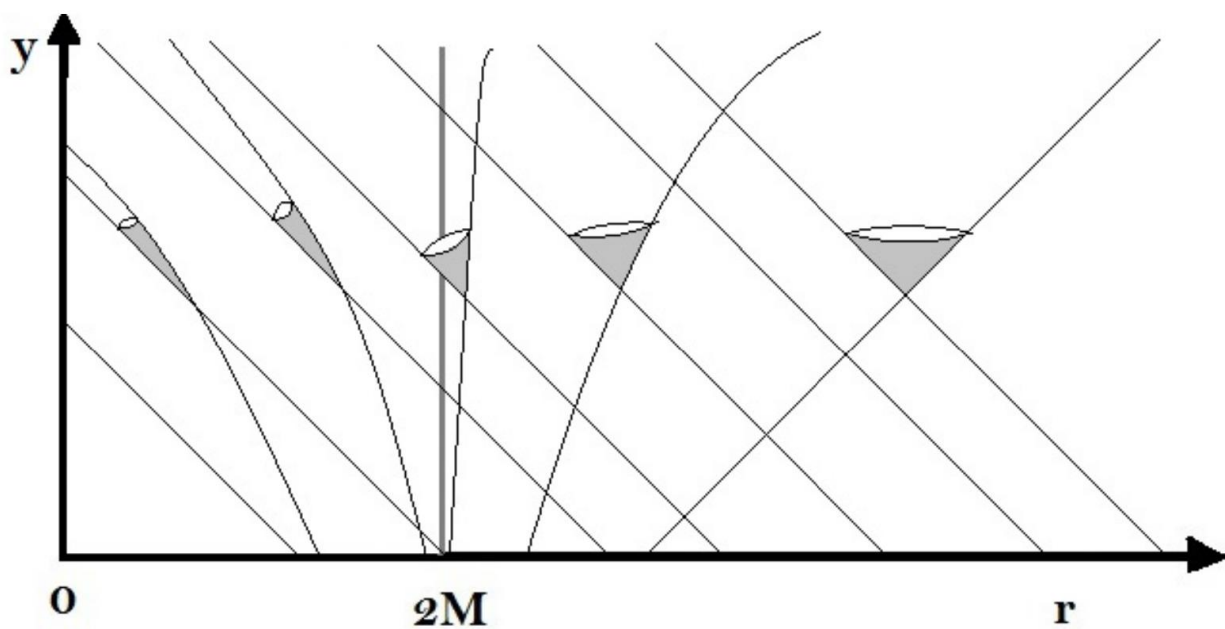
با انتگرال گرفتن از آن میتوانیم به دست بیاوریم:

$$v = 2r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) + constant \quad (2.26)$$

که مخروط نوری را در نقاطی تعریف میکند که اشعه ی نور به سمت داخل $r < 2M$ و اشعه ی نوری به سمت خارج در $r > 2M$. این ها را میتوان در یک نمودار رسم کرد اما این بار با $y = v - r$

ژئودیسک هایی که v ثابتا دارند اشعه ها به سمت داخل را نمایش میدهند. طبق شکل 2.3 میتوان دید که چگونه اشعه های نوری داخلی را میتوان به دو شیوه تعریف کرد و زمانی که $r < 2M$ در این صورت تنها اشعه ی نور به سمت داخل وجود دارد. این نشان میدهد که زمانی که هر چیزی از افق رویداد عبور کند دیگر باز نخواهد گشت.

v-r



شکا 2.3: اشعه های نوری در مختصات ادینگتون-فیکناشتاین، $v=r$. مخروط های نور اکنون به تدریج منحرف می شوند تا اینکه پس از افق رویداد حتی نور نیز نمی تواند از جاذبه سیاه چاله ها فرار کند.

فصل 3. تقریب WKB [2]

تقریب WKB یک روش مفید برای توضیح رفتار یک تابع موج در یک پتانسیلی است که به آرامی در حال تغییر است. این تقریب یک وسیله ی ریاضی به ما میدهد که به وسیله ی آن میتوان تونل زنی ذرات را در مناطقی که از نظر فیزیک کلاسیک غیر مجاز هستند را توضیح داد.

3.1 معادله ی شرودینگر و تقریب WKB

معادله ی مستقل از زمان شرودینگر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (E - V(x))\psi \quad (3.1)$$

را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi ; p = \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (3.2)$$

تا اینجا فرض بر این است که $E > V$. تابع موج میتواند توسط دامنه اش $A(x)$ و فاز $\theta(x)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\psi(x) = A(x)e^{i\theta(x)} \quad (3.3)$$

با قرار دادن معادله ی موج در 3.2 به دست می آوریم:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + 2i \frac{dA}{dx} \frac{d\theta}{dx} + iA \frac{d^2 \theta}{dx^2} - A \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \quad (3.4)$$

این به ما دو معادله میدهد. با برابر قرار دادن دو قسمت حقیقی و موهومی دو طرف به دست می آوریم:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - A \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2} A \quad (3.5)$$

قسمت موهومی به راحتی حل میشود. از معادله ی 3.6 به دست می آوریم:

$$\frac{d}{dx} \left(A^2 \frac{d\theta}{dx} \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\rightarrow A = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\theta}{dx}}} \quad (3.8)$$

برای حل کردن قسمت حقیقی، فرض اصلی تقریب WKB نقش اصلی بازی میکند. فرضی که میگیریم این

است که $\frac{d^2 A}{dx^2} \ll \frac{d^2 \theta}{dx^2}$ یا $\frac{d^2 A}{dx^2} \ll \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2$. با این فرض به دست می آوریم:

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} \quad (3.9)$$

سپس به وسیله ی آن به دست می آوریم:

$$\theta(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx \quad (3.10)$$

و راه حلی که برای آن پیدا میکنیم که به شکل زیر است:

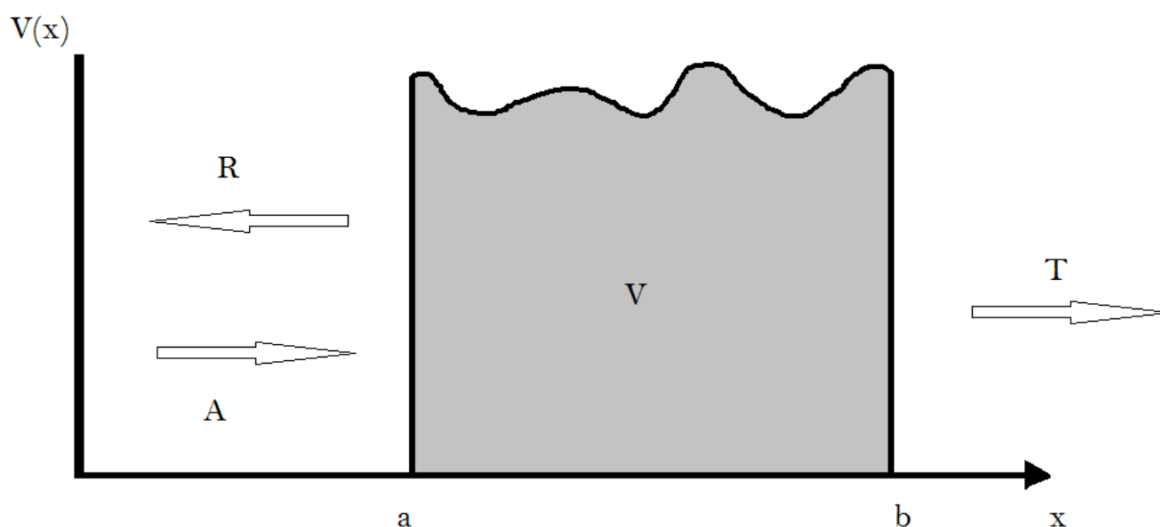
$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (3.11)$$

3.2 تونل زنی

تا اینجا فرض کرده ایم که انرژی بیشتر از پتانسیل است اما به طور مشابه میتوان برای مواردی که $E < V$ هم پیدا کرد. تنها توان ما این است که توان اکسپوننشیل موهومی میشود و راه حل عمومی برابر است با:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \text{Im} \int p(x) dx} + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \text{Im} \int p(x) dx} \quad (3.12)$$

معادله ی 3.12 نشان میدهد که چگونه یک تابع موج در ناحیه ی ممنوعه (در مکانیک کلاسیک) میتواند قرار داشته باشد. یک پتانسیل مستطیلی $V(x)$ را به دست بیاورید که بین دو نقطه ی $x = a$ و $x = b$ قرار دارد (شکل 3.1) حال سه ناحیه وجود دارد که میتوانیم تعریف کنیم: ناحیه ای که موج به آن میرسد $x < a$ ، ناحیه ی غیر کلاسیکی $a < x < b$ و ناحیه ای که پشت پتانسیل قرار دارد $x > b$.



شکل 3.1: از یک پتانسیل مربعی پراکنده می شومند. و A، B و C به ترتیب موج ورودی، بازتابی و عبوری هستند.

تابع موج در ناحیه ی اول برابر تابع ذره ای آزاد است:

$$\psi(x) = Ae^{i\eta x} + Re^{-i\eta x} ; \quad \eta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (3.13)$$

در ناحیه ی سوم هم تابع موج برابر یک ذره ی آزاد است:

$$\psi(x) = T e^{i\eta x} \quad (3.14)$$

و در ناحیه ی وسط، با استفاده از معادله ی 3.12 داریم:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} e^{\frac{i}{\hbar} \text{Im} \int_a^b p(x) dx} + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \text{Im} \int_a^b p(x) dx} \quad (3.15)$$

اثر پتانسیل کاهش دامنه خواهد بود، بنابراین برای بدست آوردن یک نتیجه ی فیزیکی باید $B = 0$.

این سه معادله نشان میدهد که چگونه جبهه ی موج در نزدیکی و اطراف یک پتانسیل عمل میکند. احتمال عبور را با Γ نشان میدهیم که تابعی از دامنه ی موجی ورودی، A ، و موج عبوری، T ، است و برابر است با:

$$\Gamma \equiv \frac{|T|^2}{|A|^2} \quad (3.16)$$

اگر هیچ مانعی قرار نداشت، $A = T$ و $R = 0$ و اگر مانع بی نهایت بلند یا پهن باشد $A = R$ است. احتمال عبور تنها توسط خصوصیات پتانسیل مشخص میشود. این به آن معنی است که دامنه ی A و T ، توسط رفتار جبهه ی موج در ناحیه ی غیر کلاسیک تعریف میشود.

$$\Gamma \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im} \int_a^b p(x) dx} \quad (3.17)$$

تابع اکسپوننشال در اصل همان کنش ذره ای است که در راستای یک جهان خط حرکت میکند. به خاطر همین میتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\Gamma \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im} S} \quad (3.18)$$

که S در آن کنش ذره است:

$$S = \int_a^b p(x) dx \quad (3.19)$$

فصل 4. تابش هاوکینگ همانند تونل زنی کوانتومی [3] و [4]

در فصل 2 هندسه ی فضا-زمان خارج از سیاهچاله را بررسی کردیم و معادله ای برای ژئودزیک تهی شعاعی پیدا کردیم. در اینجا تکنیک های تقریب WKB، همانطور که در فصل 3 مورد بحث قرار گرفت، برای توضیح تابش هاوکینگ همانند پدیده ی تونل زنی ذرات به بیرون از طریق افق رویداد استفاده خواهد شد. این ذرات سپس به سمت بی نهایت حرکت می کنند، جایی که یک ناظر این را به عنوان تشعشع بیرون آمده از سیاهچاله می بیند.

4.1 تولید جفت

در مکانیک کوانتومی این امکان وجود دارد که یک جفت ذره از نوسانات در خلاء ایجاد شوند. این ذرات معمولاً دوباره به سرعت به هم می رسند و از بین می روند. با این حال، اگر این جفت در نزدیکی افق رویداد سیاهچاله تشکیل شود، ممکن است اتفاق جالبی بیفتد. یک جفت ذره را در نظر بگیرید که دقیقاً در داخل افق رویداد ایجاد می شود که حامل انرژی مثبت و دیگری انرژی منفی است. به طور کلاسیک هر دو ذره در سیاهچاله سقوط می کنند. اما در مکانیک کوانتومی مجاز است که ذره با انرژی مثبت بتواند به سمت خارج تونل بزند و از سیاهچاله فرار کند. این ذره اکنون می تواند به سمت بیرون حرکت کند و آن را میتوان به عنوان تابش سیاهچاله در نظر گرفت. ذره با انرژی منفی در داخل باقی می ماند و در تکینگی سیاهچاله می افتد و جرم سیاهچاله را کاهش می دهد. از آنجایی که جرم و شعاع سیاهچاله رابطه ی مستقیم با هم دارند، این امر منجر به کاهش اندازه سیاهچاله می شود.

همین اتفاق برای تولید جفت در خارج از افق رویداد می افتد، که در آن ذره با انرژی منفی می تواند به داخل تونل بزند و ذره انرژی مثبت در خارج باقی می ماند. با در نظر گرفتن ذرات انرژی منفی صرفاً به عنوان ذرات عادی تحت وارونگی زمان، مشخص است که هر دو فرآیند در واقع یکسان هستند. در هر دو مورد، فرآیند را می توان به عنوان یک ذره با انرژی مثبت توصیف کرد که از میان افق رویداد به بیرون تونل میزند.

4.2 مانع کجاست؟ [3]

با این حال، یک مشکل بزرگ در این مسئله وجود دارد. برای تونل زنی کوانتومی، ذره باید از یک موانع عبور کند. اما به نظر می رسد هیچ مانعی در افق رویداد وجود ندارد، هیچ مسیری در فضا-زمان وجود ندارد که به وضوح بتوان آن را به عنوان منطقه ممنوعه حساب کرد.

توضیحی برای این وجود دارد و در بقای انرژی نهفته است. همانطور که سیاهچاله تابش می کند، انرژی اش در فرم جرم از دست می دهد که به این معنی است که سیاهچاله کوچک می شود. افق رویداد $r = 2M$ اکنون به شعاع جدیدی کاهش می یابد $r' = 2(M - E)$ که کوچکتر از قبل است. در اینجا E انرژی ذره ای است که تونل میزند و مقداری که افق رویداد کاهش می یابد به خود ذره بستگی دارد. در اصل میتوان گفت که این خود ذره است که سد را تشکیل می دهد.

4.3 تونل زنی [4]

برای توصیف رویدادی که از افق رویداد عبور می کند، باید یک سیستم مختصاتی داشته باشیم که در افق خوش رفتار است. هندسه شوارتزشیلد در مختصات ادینگتون-فینکلشتاین این نیاز را برآورده می کند. محاسبات زیر پوسته‌های گرانشی (کروی متقارن) با انرژی E را در گرانش همیلتونی را بیان میکند. کراوس و ویلچک دریافتند که این کار به صورت ریاضی با جایگزینی M با $M - E$ در معادله انجام می شود. اکنون لمان خطی برابر است با:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2(M - E)}{r} \right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

در اینجا نتایج حاصل از تقریب WKB قرار است استفاده شود، اما آیا انجام این کار درست است؟ تابش یک سیاهچاله معمولاً دارای طول موجی به اندازه یک سیاهچاله است. بنابراین می توان استدلال کرد که این با فرض های در نظر گرفته شده در نرخ تونل زنی مطابقت ندارد. اما هنگامی که توسط یک ناظر محلی دور از سیاهچاله اندازه گیری شود، طول موج ردیابی شده به سمت افق به دلیل انتقال به سرخ به شدت تغییر می کند، به پیوست B مراجعه کنید، در این صورت میتوانیم از تقریب WKB استفاده کنیم.

حال کنش را دوباره بررسی میکنیم:

$$S = \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr \quad (4.2)$$

با استفاده از معادله ی هامیلتون $\dot{r} = \frac{dH}{dp'_r}$ و این را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$S = \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_M^{M-E} \frac{dH}{\dot{r}} dr \quad (4.3)$$

که در آن $\dot{r} = \frac{dr}{dv}$ و $r_{in} = 2M$ و $r_{out} = 2(M - E)$ ناحیه هست که تونل زنی در آن رخ میدهد. هامیلتونی برای پوسته ی گرانشی برابر است با $H = M - E$ و با استفاده از 2.25 با استفاده از عبارت جدید باری جرم به دست می آوریم:

$$S = -2 \int_0^E \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \frac{2(M - E')}{r'}} dE' \quad (4.4)$$

علت به وجود آمدن علامت منفی هامیلتونی است $dH = -dE$. برای به دست آوردن این انتگرال یک پُل در $r = 2(M - E)$

$$Res\left(\frac{1}{1 - \frac{2(M - E')}{r'}}\right)_{r=2(M-E')} = \left(\frac{2(M - E')}{r^2}\right)_{r=2(M-E')} = 2(M - E') \quad (4.5)$$

حال جواب انتگرال را با $2\pi i Res|f(x)$ به دست می آوریم چون مسیر یک نیم دایره ی باز است. با استفاده از تئوری کوشی به دست می آوریم:

$$S = 2\pi i \int_0^E 2(M - E') dE' = 4\pi i EM \left(1 - \frac{E}{2M}\right) \quad (4.6)$$

که همانگونه که انتظار داشتیم یک عدد موهومی است. با استفاده از معادله ی 3.18، نرخ تونل زنی برای همچنین پروسه ای متناسب است با اکسپوننشال دیکی کردن در این ناحیه:

$$\Gamma \propto e^{-\frac{2}{\hbar} ImS} = e^{-\frac{8\pi EM}{\hbar} \left(1 - \frac{E}{2M}\right)} \quad (4.7)$$

4.3.1 دمای سیاه چاله

نتیجه ای که برای نرخ تونل زنی پیدا کردیم، پیدا کردیم همان چیزی است که پلانک پیش بینی میکرد. اما برای انرژی های کوچک، از جمله ی اصلاحی میتوان صرف نظر کرد و ما خواهیم داشت $e^{-\beta E}$ که در آن $\beta = \frac{1}{k_B T}$ است. با فرض اینکه سیاه چاله همانند یک جسم سیاه تابش میکند، به دست می آوریم:

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} \quad (4.8)$$

اگر c و G برابر یک نباشند خواهیم داشت:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (4.9)$$

که دقیقا برابر همان دمایی است که هاوکینگ برای سیاه چاله پیش بینی کرد.

فصل 5. نتیجه گیری:

با شروع با حل شوارشیلد معادله میدان انیشتین، رفتار نور در نزدیکی سیاهچاله در این پروژه مورد مطالعه قرار گرفت. با فرض یک سیستم مختصات با رفتار خوب در نزدیکی افق رویداد منجر به معرفی مختصات ادینگتون-فینکلشتاین شد و اینها درک بهتری از فرآیندهای نزدیک و از طریق افق رویداد را فراهم کردند.

برای توصیف تونل زنی ذرات از طریق افق رویداد، تقریب WKB باید استفاده شود و در این تقریب یک احتمال تونل زنی به دست آمد. با استفاده از این در پوسته های بدون جرم و گرانشی، احتمال تونل زنی به دست آمد:

$$\Gamma \propto e^{-\frac{8\pi EM}{\hbar} \left(1 - \frac{E}{2M}\right)} \quad (5.1)$$

برای مقادیر کوچک E دمای سیاه چاله برابر میشود با:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (5.2)$$

و این کاملاً با پیش‌بینی‌های استیون هاوکینگ و بسیاری دیگر پس از او مطابقت دارد. به نظر می‌رسد که این تصویر، از ذرات در حال تونل زدن در افق، توضیح قابل قبولی برای این فرآیند باشد.

یکی از موضوع‌هایی که درباره‌ی آن بحث کردیم از دست رفتن اطلاعات در این فرآیند است. از آنجایی که همه انواع ذرات می‌توانند وارد سیاهچاله شوند، مقدار معینی از انرژی وارد سیستم می‌شود. اما اگر سیاهچاله تابش گرمایی ساطع کند، بخش بزرگی از اطلاعات از بین می‌رود. به عنوان مثال، تنها بر اساس تابش ساطع شده از سیاهچاله، نمی‌توان گفت که در ابتدا چه ذره‌ای به سیاهچاله سقوط کرده است.

اما این تنها در صورتی درست است که سیاهچاله تابش گرمایی ساطع کند، با ضریب بولتزمن به شکل $e^{-\beta E}$ محاسبات ما این عبارت را نشان داد، اما دقیقاً نه. یک عبارت اضافی وجود دارد: $1 - \frac{E}{2M}$. این بدان معناست که تابش یک سیاهچاله دقیقاً حرارتی نیست و همچنان حاوی اطلاعاتی در مورد ذره اصلی است. این نشان می‌دهد که از این روش، سیاهچاله می‌تواند تابش کند اما هیچ اطلاعاتی از دست نخواهد رفت.

پیوست A: واحد های هندسی شده:

معمولاً معادلات در واحدهای طول-جرم-زمان نوشته می‌شوند، ثابت‌های فیزیکی خاصی تمایل دارند در همه جا ظاهر شوند. در نسبیت عام اینها ثابت گرانشی نیوتن G و سرعت نور c هستند. همه این نمادهای اضافی می‌توانند معادلات را نسبتاً طولانی و نامرتب برای خواندن کنند. معمولاً معرفی واحدهای هندسی که در آنها $G = c = 1$ است و سپس تبدیل نتیجه نهایی به سیستم معمولی واحد طول جرم-زمان بسیار مفید است.

در واحدهای هندسی همه کمیت ها دارای بعد طول هستند و برای تبدیل واحدها به واحدهای استاندارد باید تبدیل های زیر انجام شود:

$$M \rightarrow \frac{GM}{c^2} \quad (A.1)$$

$$t \rightarrow ct \quad (A.2)$$

$$L \rightarrow L \quad (A.3)$$

پیوست B: انتقال سرخ گرانشی

از ناوردایی در جابجایی های زمانی در هندسه شوارتزشیلد می توان دریافت که حاصلضرب درونی بردار کیلینگ $\vec{\zeta} = (1, 0, 0, 0)$ و تکانه $\vec{p}$ ذرات پایسته است. ناظری در مختصات R انرژی فوتونی را اندازه گیری میکند. او انرژی فوتون را $E = -\vec{p} \cdot \vec{u}_{obs}$ می یابد. از آنجایی که انرژی آن به فرکانس آن بسنگی دارد $E = \hbar\omega$ ، ناظر فرکانس زیر را اندازه گیری میکند:

$$-\vec{p} \cdot \vec{u}_{obs} = \hbar\omega \quad (B.1)$$

چهار-سرعت یک ناظر باید شرایط نرمالیزسیون را رعایت کند. $\vec{u}_{obs} \cdot \vec{u}_{obs} = -1$ و سپس برای یک ناظر ساکن بردار چهار سرعت برابر است با:

$$\vec{u} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} \vec{\zeta} \quad (B.2)$$

انرژی یک فوتون که توسط یک ناظر ساکن در R برابر است با:

$$\hbar\omega_R = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} (-\vec{\zeta} \cdot \vec{p})_{r=R} \quad (B.3)$$

برای یک ناظر ساکن در بی نهایت خواهیم داشت:

$$\hbar\omega_\infty = (-\vec{\zeta} \cdot \vec{p})_{r=\infty} \quad (B.4)$$

اما عبارت $-\vec{\zeta} \cdot \vec{p}$ یک کمیت ناورداست. با استفاده از B.3 و B.4 رابطه ی بین دو فرکانس را به دست می آوریم:

$$\omega_\infty = \omega_R \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} \quad (B.5)$$

معادله ی 3.5 بیان میکند که فوتونی که از منبع گرانش قرار میکند انرژی اش را از دست میدهد و تحت یک انتقال سرخ قرار میگیرد. برای r های بزرگتر، فرکانس کوچک تر میشود.

- [1] J. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Pearson, San Francisco, 2002).
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd edition (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY, 2018).
- [3] M. K. Parikh, *A Secret Tunnel Through The Horizon*, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 2351 (2004).
- [4] M. K. Parikh and F. Wilczek, *Hawking Radiation As Tunneling*, Phys Rev Lett **85**, 5042 (2000).